素数計数関数$\boldsymbol{\pi(x)}$

東森秀朋　2024/02/12

概要

自然数は人間が自然に倣って創造したものである.
したがって，自然数の世界は自然の世界である.
自然の世界では，自然法則は発見されるものであって，証明されるものではない.
そうすると，素数定理は素数法則であって，証明されるものではなく，発見されるものである.

“$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数である確率である”は自然数の法則(素数定理)である.

上記自然数の法則(素数定理)は以下のように発見される.

素数計数関数$\pi(x)$は上記確率$\frac{1}{\ln p}$の積分である.

上記積分は有限項の級数である.
上記級数から算出される素数計数値は Wikipedia の素数計数値と殆ど一致する.
このように，上記自然数の法則(素数定理)は発見される.

１．始めに

自然数は人間が自然に倣って創造したものである.
したがって，自然数の世界は自然の世界である.
自然の世界では，自然法則は発見されるものであって，証明されるものではない.
そうすると，素数定理は素数法則であって，証明されるものではなく，発見されるものである.

“$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数である確率である”は自然数の法則(素数定理)である.

上記自然数の法則(素数定理)は以下のように発見される.

素数計数関数$\pi(x)$は上記確率$\frac{1}{\ln p}$の積分である.

上記積分は有限項の級数である.
上記級数から算出される素数計数値は Wikipedia の素数計数値と殆ど一致

する.

このように，上記自然数の法則 (素数定理) は発見される.

２．確率$\frac{1}{\ln p}$の発見

自然数2以上の自然数pについて次の不等式を成立させる自然数mとnは常に存在する．　eは自然対数 (ネーピア数)

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

対数に変換すると、次の不等式が成立する.

$$m < n \ln p < (m+1) \qquad \ln e = 1$$

$$1 < \frac{n \ln p}{m} < (1 + \frac{1}{m})$$

自然数mが無限大のとき、次の等式が成立する.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n \ln p}{m} = 1$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n}{m} = \frac{1}{\ln p}$$

自然数2から自然数xまでに$\pi(x)$個の素数$p_1, p_2, p_3 \ldots p_i \ldots p_\pi$が存在する.

上記素数p_i に対して、以下の等式が成立する.

$$\frac{1}{\ln p_i} \ln p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{\pi} \frac{1}{\ln p_i} \ln p_i = \pi$$

そうすると、上記数値1は、1個の素数の存在を示している.

つまり、上記数値1は素数の存在確率1を示している.

言い換えれば、$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数である確率 (比率または比率) である.

３．素数計数関数$\pi(x)$の導出

素数計数関数$\pi(x)$は確率$\frac{1}{\ln p}$の積分である.

$$\pi(x) = \sum_{p=2}^{x} \frac{1}{\ln p} = \int_2^x \frac{1}{\ln p} dp$$

上記積分は下記に示すように級数(2.1)である.

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{\ln p}\right)=\frac{1}{\ln p}-\frac{p}{(\ln p)^2}\frac{1}{p}$$

$$=\frac{1}{\ln p}-\frac{1}{(\ln p)^2}$$

$$\frac{1}{\ln p}=\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{\ln p}\right)+\frac{1}{(\ln p)^2}$$

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{1}{\ln p}dp=\int_2^x\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{\ln p}\right)dp+\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^2}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^2}dp$$

$$\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^2}dp=\frac{x}{(\ln x)^2}+2\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^3}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{(\ln x)^2}+2\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^3}dp$$

$$2\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^3}dp=\frac{2x}{(\ln x)^3}+6\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^4}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+6\int_2^x\frac{1}{(\ln p)^4}dp$$

以上のことを続けると次の級数(2.1)が得られる.

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\sum_{n=1}^{m}\frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} \tag{2.1}$$

自然数mは次のように算出される.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{m!x}{(\ln x)^{m+1}}\right)=\frac{m!}{(\ln x)^{m+1}}-\frac{(m+1)!x}{(\ln x)^{m+2}}\frac{1}{x}=0$$

$$1-\frac{m+1}{\ln x}=0 \qquad m=\ln x-1$$

4．上記級数(2.1)から算出した素数計数の5例を以下に示す.

$x=10^2 \qquad m=\ln x-1=\ln 10^2-1=3.$

Wikipedia $\pi(10^2)=25$

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\sum_{n=1}^{2}\frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}}=27$$

$$\frac{x}{\ln x}=21.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2} = \frac{10^2}{(\ln 10^2)^2} = 4.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{2x}{(\ln x)^3} = \frac{10^2}{(\ln 10^2)^2} + \frac{2\times10^2}{(\ln 10^2)^3} = 6.$$

$x = 10^3$ $\quad m = \ln x - 1 = \ln 10^3 - 1 = 5.$

Wikipedia $\quad \pi(10^3) = 168.$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = 171.$$

$$\frac{x}{\ln x} = 144.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2} = \frac{10^3}{(\ln 10^3)^2} = 20.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{2x}{(\ln x)^3} = \frac{10^3}{(\ln 10^3)^2} + \frac{2\times10^3}{(\ln 10^3)^3} = 27.$$

$x = 10^{10}$ $\quad m = \ln x - 1 = \ln 10^{10} - 1 = 22.$

Wikipedia $\quad \pi(10^{10}) = 455{,}052{,}511$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{7} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = 455{,}055{,}222.$$

$$\frac{x}{\ln x} = 434{,}294{,}481.$$

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} + \frac{2\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^3} = 20{,}499{,}430.$$

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} + \frac{2\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^3} + \frac{6\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^4} = 20{,}712{,}876.$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} + \cdots + \frac{24\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^5} = 20{,}749{,}955.$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} + \cdots + \frac{120\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^6} = 20{,}758{,}006.$$

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} + \cdots + \frac{720\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^7} = 20{,}760{,}104.$$

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} + \cdots + \frac{5040\times10^{10}}{(\ln 10^{10})^8} = 20{,}760{,}741.$$

$x = 10^{20}$ $\quad m = \ln x - 1 = \ln 10^{20} - 1 = 45.$

Wikipedia $\pi(x = 10^{20}) = 2{,}220{,}819{,}602{,}560{,}918{,}840.$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{8} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = 2{,}220{,}819{,}601{,}694{,}094{,}327.$$

$$\frac{x}{\ln x} = \frac{10^{20}}{\ln 10^{20}} = 2{,}171{,}472{,}409{,}516{,}259{,}138.$$

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} = 47{,}152{,}924{,}252{,}903{,}482.$$

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \frac{2\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^3} = 49{,}200{,}749{,}733{,}767{,}281.$$

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \cdots + \frac{6\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^4} = 49{,}334{,}153{,}629{,}703{,}285.$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \cdots + \frac{24\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^5} = 49{,}345{,}740{,}944{,}877{,}165.$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \cdots + \frac{120\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^6} = 49{,}346{,}999{,}021{,}637{,}187.$$

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \cdots + \frac{720\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^7} = 49{,}347{,}162{,}934{,}375{,}593.$$

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \cdots + \frac{5040\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^8} = 49{,}347{,}187{,}849{,}614{,}824.$$

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} + \cdots + \frac{40320\times10^{20}}{(\ln 10^{20})^9} = 49{,}347{,}192{,}177{,}835{,}189.$$

$x = 10^{28}$ $\quad m = \ln x - 1 = \ln 10^{28} - 1 = 63.$

Wikipedia $\pi(10^{28}) = 157{,}589{,}269{,}275{,}973{,}410{,}412{,}739{,}598$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = 157{,}589{,}107{,}496{,}661{,}184{,}852{,}886{,}301.$$

$$\frac{x}{\ln x} = 155{,}105{,}172{,}108{,}304{,}224{,}161{,}117{,}471.$$

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{x}{(\ln x)^2} = \frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} = 2{,}405{,}761{,}441{,}474{,}667{,}464{,}540{,}316.$$

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} + \frac{2\times10^{28}}{(\ln 10^{28})^3} = 2{,}480{,}390{,}649{,}960{,}957{,}535{,}973{,}511.$$

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} \ldots + \frac{6\times10^{28}}{(\ln 10^{28})^4} = 2{,}483{,}863{,}262{,}828{,}929{,}297{,}882{,}432.$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} \ldots + \frac{24\times10^{28}}{(\ln 10^{28})^5} = 2{,}483{,}917{,}124{,}850{,}584{,}525{,}088{,}882.$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} \dots + \frac{120\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^6} = 2{,}483{,}933{,}833{,}406{,}862{,}395{,}538{,}927.$$

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} \dots + \frac{720\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^7} = 2{,}483{,}935{,}388{,}356{,}960{,}691{,}768{,}830.$$

次の例$\pi(10^{30})$はWikipediaに未だ載っていない$m = 6$までの予測である．

$x = 10^{30}$　　$m = \ln x - 1 = \ln 10^{30} - 1 = 69.$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = 14{,}692{,}398{,}886{,}701{,}008{,}787{,}306{,}610{,}970.$$

$$\frac{x}{\ln x} = \frac{10^{30}}{\ln 10^{30}} = 14{,}476{,}482{,}730{,}108{,}394{,}255{,}037{,}630{,}630.$$

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{x}{(\ln x)^2} = \frac{10^{30}}{(\ln 10^{30})^2} = 209{,}568{,}552{,}235{,}126{,}588{,}022{,}178{,}699.$$

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{30}}{(\ln 10^{30})^2} + \frac{2\times 10^{30}}{(\ln 10^{30})^3} = 215{,}636{,}183{,}289{,}537{,}845{,}978{,}110{,}171.$$

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{30}}{(\ln 10^{30})^2} \dots + \frac{6\times 10^{30}}{(\ln 10^{30})^4} = 215{,}899{,}697{,}158{,}053{,}407{,}865{,}503{,}980.$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{30}}{(\ln 10^{30})^2} \dots + \frac{24\times 10^{30}}{(\ln 10^{30})^5} = 215{,}914{,}956{,}173{,}920{,}246{,}208{,}658{,}270.$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{30}}{(\ln 10^{30})^2} \dots + \frac{120\times 10^{30}}{(\ln 10^{30})^6} = 215{,}916{,}060{,}658{,}318{,}619{,}884{,}878{,}431.$$

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \frac{10^{30}}{(\ln 10^{30})^2} \dots + \frac{720\times 10^{30}}{(\ln 10^{30})^7} = 215{,}916{,}156{,}592{,}614{,}532{,}268{,}980{,}340.$$

５．結論

以上のとおり，素数計数関数$\pi(x)$の素数計数値は上記級数(2.1)から計算可能である．

また，経験的に判っている“おおよそ間隔$\ln p$で1個の素数が自然数中に出現する”ことは確率的に証明された．

素数は確率的に出現するから，その出現を予測することは不可能である．

６．参考文献

1. Erdős, Paul (1949-07-01), “On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the

prime number theorem,", Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.: National Academy of Sciences) 35 (7): 374-384, doi:10.1073/pnas.35.7.374